CONCOURS COMMUN MINES, PONTS,.. 1975
OPTIONS M ET P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(DUREE : 4 HEURES)

Cette épreuve commune aux candidats des options M et P' comporte 3 pages.

Les deux parties du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

On considère l'équation du second degré

$$(1) \quad z^2 - bz + c = 0$$

dont les coefficients b et c sont dans $\mathbb{Z}$ et vérifient $b^2 - 4c < 0$;
α étant l'une des racines de cette équation, on désigne par $\mathbb{Z}_\alpha$ l'ensemble des nombres complexes $z = p + q\alpha$ où p et q appartiennent à $\mathbb{Z}$. On désigne également par $\mathbb{Q}_\alpha$ l'ensemble des nombres complexes $w = u + v\alpha$ où u et v appartiennent à $\mathbb{Q}$.

1°) Montrer que $\mathbb{Z}_\alpha$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de la deuxième racine de l'équation (1) ?

2°) Soit f l'application de $\mathbb{Z}_\alpha$ dans $\mathbb{Z}$ définie par

$$f(p + q\alpha) = p^2 + bpq + cq^2 .$$

Montrer que

$$f(x) = 0 \iff x = 0 ;$$
$$f(xy) = f(x)\, f(y) .$$

3°) Soit G_α l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_\alpha$ qui sont inversibles dans $\mathbb{Z}_\alpha$. Montrer que G_α est un groupe pour la multiplication. Quelle est l'image de G_α par f ? En déduire que si $x = p + q\alpha$ est un élément de G_α, on a l'inégalité :

$$q^2 (4c - b^2) \leqslant 4 .$$

En discutant suivant les valeurs attribuées à b et à c, déterminer tous les éléments de G_α.

4°) a - Montrer que $\mathbb{Q}_\alpha$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$;

b - Montrer que l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}$ définies par

$$M_{u,v} = \begin{bmatrix} u & v \\ -vc & u + bv \end{bmatrix}$$

(où u et v sont des rationnels quelconques) est un corps pour l'addition et la multiplication matricielles. Prouver que ce corps est isomorphe au corps $\mathbb{Q}_\alpha$.

5°) a - Montrer que $\mathbb{Q}_\alpha$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Quelle est la dimension de ce sous-espace vectoriel ?

b - Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{Q}_\alpha$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$x \to \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(u + v\alpha)} = \sqrt{u^2 + b\,uv + cv^2}$$

est une norme euclidienne sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}_\alpha$. Déterminer le produit scalaire dont

dérive cette norme. Que peut-on dire de la restriction à $\mathbb{Q}_\alpha$ de la fonction module sur $\mathbb{C}$?

6°) a - Etant donné un élément Y de $\mathbb{Q}_\alpha$, $Y \neq 0$, montrer que $\{Y, \alpha Y\}$ constitue une base de $\mathbb{Q}_\alpha$.

b - On considère deux éléments X et Y dans $\mathbb{Z}_\alpha$ avec $Y \neq 0$. Montrer qu'il existe un élément Q dans $\mathbb{Z}_\alpha$ et deux rationnels λ et μ appartenant à l'intervalle $[0,1[$ tels que

$$X = YQ + R \quad \text{où} \quad R = Y(\lambda + \mu\alpha) .$$

7°) On suppose dans cette septième question que $c = 1$ et $b = -1$;

a - Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{Z}_\alpha$ et pour tout $Y \in \mathbb{Z}_\alpha$, $Y \neq 0$, il existe un couple (Q,R) d'éléments de $\mathbb{Z}_\alpha$ tel que

$$X = YQ + R \quad \text{et} \quad f(R) < f(Y) .$$

b - On donne $X = 5 + 7\alpha$ et $Y = 3 + \alpha$. Déterminer une solution (Q,R) du problème précédent et montrer que cette solution n'est pas unique.

c - Soit I un idéal arbitraire de l'anneau $\mathbb{Z}_\alpha$. Montrer que cet idéal est principal. Si le même idéal non nul est engendré par deux éléments distincts Z et Z' de $\mathbb{Z}_\alpha$, quelle est la relation qui existe entre Z et Z' ?

d - Montrer que l'ensemble des éléments $X = (5 + 7\alpha)A + (3 + \alpha)B$ où A et B sont des éléments quelconques de $\mathbb{Z}_\alpha$, est un idéal. Déterminer tous les générateurs de cet idéal.

8°) Soit A_α l'ensemble des automorphismes ϕ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}_\alpha$ tels que

$$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$$

pour tous éléments x et y dans $\mathbb{Q}_\alpha$. Déterminer tous les éléments de A_α .

PARTIE II

On considère l'équation du 3ème degré

(2) $\quad X^3 - X^2 - 2X + 1 = 0$.

1°) Montrer que toutes les racines de (2) sont réelles et appartiennent à l'intervalle $]-2,+2[$. Soit θ l'une de ces racines, montrer que θ n'est pas rationnel et que $2 - \theta^2$ est une autre racine de l'équation (2) .

Dans la suite, on désigne par $\mathbb{Q}_\theta$ l'ensemble des réels $x = u + v\theta + w\theta^2$ où u, v, w sont trois rationnels arbitraires.

Montrer que $\mathbb{Q}_\theta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? Que peut-on dire de l'ensemble des trois racines de l'équation (2).

On admet que $\mathbb{Q}_\theta$ est un sous-corps du corps des réels.

2°) On désigne par A_θ l'ensemble des automorphismes ϕ de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}_\theta$ qui vérifient

$$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$$

pour tous les éléments x et y de $\mathbb{Q}_\theta$ muni de sa structure de corps. Montrer que A_θ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}_\theta$.

-3-

Montrer que A_θ est un ensemble de trois éléments que l'on désignera par ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 et que l'on définira explicitement. Trouver les espaces propres de ϕ_1 , ϕ_2 .
(On pourra supposer que ϕ_0 désigne l'automorphisme identité de $\mathbb{Q}_\theta$, autrement dit l'élément unité de A_θ) .

3°) On considère les trois applications de $\mathbb{Q}_\theta$ dans lui-même T_1, T_2, T_3 définies par

$$T_1(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) + \phi_2(x) \quad ;$$

$$T_2(x) = \phi_0(x)\,\phi_1(x) + \phi_0(x)\,\phi_2(x) + \phi_1(x)\,\phi_2(x) \quad ;$$

$$T_3(x) = \phi_0(x)\,\phi_1(x)\,\phi_2(x) \ .$$

a - Montrer que les images de ces trois applications T_1, T_2, T_3 sont incluses dans $\mathbb{Q}$.

De façon plus générale, soit un polynôme P, élément de $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$, symétrique et homogène.

Montrer que l'application de $\mathbb{Q}_\theta$ dans $\mathbb{Q}_\theta$ définie par :

$$x \longrightarrow P(\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x))$$

est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

b - Montrer que l'application B définie par :

$$B(x,y) = T_1(xy) \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{Q}_\theta \times \mathbb{Q}_\theta$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

Montrer que l'application T_2 est une forme quadratique sur l'espace $\mathbb{Q}_\theta$.
Cette forme quadratique est-elle non dégénérée positive ?

∴

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail